Elaborazione Numerica dei Segnali - A.A. 2017-18
prof. Pierangelo Migliorati

Laboratorio Matlab N.3

[**Es. 1**] DFT E IDFT

In questo esercizio si implementano la DFT e la $IDFT$, definite come segue:

$$\begin{aligned} X[k] &= DFT_N\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}, \qquad k = 0, \ldots, N-1 \\ x[n] &= IDFT_N\{x[n]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} n}, \qquad n = 0, \ldots, N-1 \end{aligned}$$

(i) Scrivere un programma che implementi la DFT_N e la $IDFT_N$ secondo la definizione (verificare la correttezza dei risultati ottenuti confrontando con il comando matlab fft);

(ii) Provare ad applicare la DFT ad un numero intero di periodi di un segnale sinusoidale di frequenza discreta $\frac{1}{4}$. Cosa accade alla DFT all'aumentare del numero di periodi?

(iii) Provare ad applicare la DFT un segnale rettangolare. Cosa accade mantenendo fissa la lunghezza del rect ed allungando il segnale con un padding di zeri?

(iv) Provare ad applicare la DFT alla somma di due sinusoidi osservando e commentando i risultati relativi alla scelta di N in rapporto al periodo delle sinusoidi.

[**Es. 2**] Calcolare la DFT mediante matrici di twiddle

Scrivere un programma che implementi la DFT_N e la $IDFT_N$ secondo la definizione utilizzando le matrici di twiddle-factor:

$$\overline{X} = \overline{W_N} \cdot \overline{x}$$

$$\overline{x} = \overline{W_N^{-1}} \cdot \overline{X} = \frac{1}{N} \cdot \overline{W_N^{*}} \cdot \overline{X}$$

e verificare la correttezza dei risultati ottenuti.

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

[**Es. 3**] Calcolare la DFT mediante matrici di twiddle

La DTF bi-dimensionale $X[k,l]$ di un'immagine 2D di dimensioni $M \times N$ detta $x[m,n]$, con $0 \leq m < M$ ed $0 \leq x < N$ è definita come:

$$X[k,l] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m,n] \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{M} m} \cdot e^{-j2\pi \frac{l}{N} n}, \qquad k = 0, \ldots, M-1, \qquad l = 0, \ldots, N-1$$

mentre la DFT-2D inversa è data da:

$$x[m,n] = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X[k,l] \cdot e^{j2\pi \frac{k}{M} m} \cdot e^{j2\pi \frac{l}{N} n}, \qquad m = 0, \ldots, M-1, \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

(i) Scrivere un programma che implementi la DFT (e la $IDFT$) bi-dimensionale secondo la definizione e verificare la correttezza dei risultati ottenuti confrontando con i comandi matlab X=fft2(x,M,N) e x=ifft2(X);

(ii) Mostrare che la DFT-2D è separabile, cioè può essere calcolata utilizzando la DFT-1D monodimensionale prima sulle righe e poi sulle colonne (o viceversa);

(iii) Provare ad applicare la DFT-2D all'immagine di test "Lena" in Figura 1 (cercare una versione 256×256! originale, ad esempio qui `https://www.cosy.sbg.ac.at/~pmeerw/Watermarking/lena.html`) e visualizzare il modulo logaritmico e la fase come immagini. Utilizzare il comando fftshift per mostrare la frequenza zero al centro del display;

(iv) Imporre a zero la fase della trasformata DFT-2D precedentemente calcolata, e quindi calcolare la IDFT-2D utilizzando solo il modulo. Mostrare l'immagine ottenuta e commentare;

(v) Imporre tutti i valori del modulo della DFT-2D a 128. Utilizzare il valore della fase originale al punto (ii) e calcolare la IDFT-2D. Mostrare l'immagine risultante e commentare l'importanza della fase della trasformata nell'elaborazione di immagini.

Figura 1: Lena è una delle immagini più comunemente usate per valutare gli algoritmi di compressione. La modella ritratta è Lenna (o Lena) Sjööblom, una ragazza svedese che lavorava a Chicago nel 1972 e che era diventata coniglietta di Playboy nel novembre dello stesso anno. Tale immagine è una delle più usate nei test di elaborazione delle immagini ed in generale una delle più diffuse nella storia dell'informatica. Lenna Sjööblom, vista la notorietà raggiunta nell'ambito scientifico grazie alla diffusione del suo ritratto, fu invitata alla 50esima Conferenza annuale del Society for Imaging Science and Technology (IS&T) nel maggio 1997, dove fu molto impegnata a firmare autografi, posare per fotografie e presentarsi ai fan (scienziati).

.